CÁLCULO III **Matemáticas e Informática** **Curso 2015/2016**	1$^{\text{er}}$Apellido: ____________ 2º Apellido: ____________	**13/01/2016**	
		Tiempo: **3h**	
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ____________ Número de matrícula:	**Calificación:**	

EXAMEN FINAL: PRIMERA PARTE

1. (4 puntos)

(a) Calcula la integral sobre $[0, \pi]$ de $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$.

(b) Justifica si es integrable la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(1/n) = n$, $n \geq 1$, y por $f(x) = 0$ en el resto.

(c) Calcula la integral sobre todo el plano de la función $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$.

(d) Calcula la longitud de la curva $\gamma \subset \mathbb{R}^4$ parametrizada por $\alpha(t) = (1, \cos t, \sin t, t)$, $-1 \leq t \leq 2$.

2. (2 puntos) Calcula la integral de la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ sobre el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

3. (2 punto) Halla el volumen del recinto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y al cono $x^2 + y^2 = z^2$.

4. (2 puntos) Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ un arco de la cicloide $\alpha(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(a) Halla la longitud de γ.

(b) Calcula la integral de $F(x,y) = y\mathbf{i} + (1-x)\mathbf{j}$ sobre γ.

EXAMEN FINAL: SEGUNDA PARTE

1. (4 puntos)

(a) Sea $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$, y $F = (P, Q)$ un campo vectorial con $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en Ω. Si la integral curvilínea de F sobre $x^2 + y^2 = 4$ es 2π, ¿cuánto vale la integral de F sobre $x^2 + y^2 = 1$?

(b) Encuentra (analítica o gráficamente), si existe, una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}$ que converge a una función continua f en $[0, 1]$ para las que la integral no permuta con el límite.

(c) Calcula el radio y campo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-1)^n] x^n$.

(d) Siendo $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la serie de Fourier de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $(-\pi, \pi)$, calcula la suma de las series numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$.

2. (2 puntos)

(a) Calcula la integral de $F(x,y) = \big(2xy\cos(\pi + x^2),\ \sin(\pi + x^2)\big)$ sobre la curva γ parametrizada por $\alpha(t) = (t^2 - \pi t,\ \sqrt{t})$, $0 \leq t \leq \pi$.

(b) Calcula la integral de $F(x,y) = \big(2xy\cos(\pi + x^2) - y,\ \sin(\pi + x^2) + x\big)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente.

3. (2 puntos)

(a) Estudia la convergencia uniforme en $[0, +\infty)$ de la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$.

(b) Halla el desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$ centrada en $x = 2$, y calcula su campo de convergencia.

4. (2 puntos) Calcula la serie de Fourier de senos de la función $f(x) = x$, $0 < x < \pi$, y dibuja la función suma en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$. ¿Cuál es el error cometido al sustituir la función por los tres primeros términos no nulos de la serie obtenida?

Soluciones Primera parte

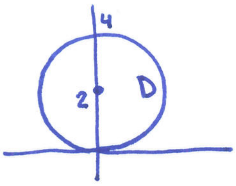
① a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x \, dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x \, dx = 2\cdot\frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{3+1}{2},\frac{2+1}{2}\right) = \dots = \frac{4}{15}$

b) El conjunto de discontinuidades de f es $D(f)=\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ y tiene contenido y medida nula $\Longrightarrow$ f es integrable en $[0,1]$

c) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} \frac{1}{1+\rho^2}\cdot\rho\cdot d\rho = 2\pi\cdot\lim_{R\to\infty}\frac{\log(1+R^2)}{2} = \infty$

d) $\displaystyle \ell(\gamma) = \int_{-1}^{2} |\alpha'(t)|\,dt = \int_{-1}^{2}\sqrt{0+\cos^2 t+\sin^2 t+1}\cdot dt = 3\sqrt{2}$

②



$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{4\sin\theta} \rho\cdot\rho\, d\rho = \dots = \frac{256}{9}$

③ $x^2+y^2+z^2=4z \Rightarrow x^2+y^2+(z-2)^2=4$

$\xrightarrow{\text{esféricas}} \rho^2 = 4\rho\cos\varphi \Rightarrow \begin{cases}\rho=0\\ \rho=4\cos\varphi\end{cases}$

$\displaystyle V(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho = \dots = 8\pi$

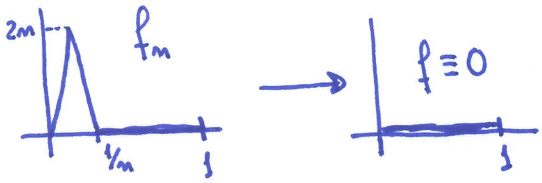
④ a) $\displaystyle \ell(\gamma) = \int_0^{2\pi}|\alpha'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\cdot dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = \dots = 8$

b) $\displaystyle \int_\gamma F\,ds = \int_\gamma y\,dx+(1-x)\,dy = \int_0^{2\pi}\Big[(1-\cos t)(1-\cos t)+(1-t+\sin t)\cdot\sin t\Big]dt =$

$\displaystyle = \int_0^{2\pi}(2-2\cos t+\sin t - t\sin t)\,dt = \dots = 6\pi$

Soluciones Segunda Parte

(1) a) El punto $(1,1)$ pertenece al exterior de $x^2+y^2=1 \Rightarrow \oint_{x^2+y^2=1} F\,ds = 0$

b) 

$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1,\ \forall n$ y $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

c) $a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ 2, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \Rightarrow \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{2} = 1 \Rightarrow$ radio $= 1$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es impar $\Rightarrow a_n = 0,\ \forall n \Rightarrow \sum a_n^2 = 0$

Por la identidad de Parseval: $\sum b_n^2 = \frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2/3}\,dx = \frac{6\sqrt[3]{\pi^2}}{5}$

(2) a) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists\ f(x,y) = y\cdot\sin(\pi + x^2)$ función potencial en $\mathbb{R}^2$

$$\int_r F\,ds = f(\alpha(\pi)) - f(\alpha(0)) = f(0,\sqrt{\pi}) - f(0,0) = \sqrt{\pi}\sin(\pi) = 0$$

b) $$\oint_{x^2+y^2=1} F\,ds = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = 2\cdot A(x^2+y^2\le 1) = 2\pi$$

(3) a) $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = x,\quad x\in[0,+\infty)$

$M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x\in[0,+\infty)\} = \sup\left\{\frac{x}{1+nx} : x\ge 0\right\} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Luego converge uniformemente.

b) $\frac{1}{3-x} = \frac{1}{1-(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n \Rightarrow \frac{1}{(3-x)^2} = \left(\frac{1}{3-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-2)^n$

Campo de convergencia: $|x-2| < 1 \Rightarrow x\in(1,3)$.

(4) $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin nx\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow f(x) \sim 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

$S_3 f = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x \Rightarrow E_3 = \|f\|^2 - \pi\left(4 + 1 + \frac{4}{9}\right) = \frac{2\pi^3}{3} - \frac{49\pi}{9}$